Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Recorrência e Transitoriedade

Seja $(X_n) \sim \text{CM}(\cdot, \mathbf{P})$ em $\mathcal{S}$.

O estado $x \in \mathcal{S}$ é dito *recorrente* se $\mathbb{P}_x(X_n = x \text{ i.v.}) = 1$, onde

$$\begin{aligned}\{X_n = x \text{ i.v.}\} &= \{X_n = x \text{ infinitas vezes}\} \\ &= \{X_n = x \text{ para infinitos } n\text{'s}\} \\ &= \cap_{i \geq 1} \cup_{j \geq i} \{X_j = x\}; \\ &= \{\exists\, n_1 < n_2 < \ldots :\ X_{n_1} = X_{n_2} = \cdots = x\};\end{aligned}$$

e x é dito *transitório* se $\mathbb{P}_x(X_n = x \text{ i.v.}) = 0$.

Recorrência e Transitoriedade (cont.)

Seja T_x o tempo de primeira passagem por x:

$$T_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\},$$

e façamos $T_x^{(0)} = 0$ e, para $k \geq 0$,

$$T_x^{(k+1)} = \inf\{n \geq T_x^{(k)} + 1 : X_n = x\} \ (\inf \emptyset = \infty).$$

$T_x^{(r)}$ é o tempo da r-ésima passagem de (X_n) por x, $r \geq 1$.

Note que, se, para algum $k \geq 1$, $T_x^{(k)} = \infty$, então $T_x^{(k+1)} = \infty$.

Para $r \geq 1$, seja

$$S_x^{(r)} = \begin{cases} T_x^{(r)} - T_x^{(r-1)}, & \text{se } T_x^{(r-1)} < \infty, \\ U_r, & \text{c. c. }, \end{cases}$$

onde $(U_r)_{r \geq 1}$ iid $U_1 \sim T_x$, e independente de (X_n).

Note que $S_x^{(1)} = T_x$. Pela PFM, $(S_x^{(r)})_{r \geq 1}$ iid sob $\mathbb{P}_x$.

Recorrência e Transitoriedade (cont.)

Seja V_x o número de visitas de (X_n) a x: $V_x = \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}\{X_n = x\}$.

Obs. 1) $\{X_n = x \text{ i.v.}\} = \{V_x = \infty\}$, logo

2) x é recorrente se e só se $\mathbb{P}_x(V_x = \infty) = 1$, e

3) x é transitório se e só se $\mathbb{P}_x(V_x = \infty) = 0$.

4) $\mathbb{E}_x(V_x) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_x(X_n = x) = \sum_{n\geq 0} P_{xx}^{(n)}$. (1)

Se $X_0 = x$, então $V_x > r \Leftrightarrow T_x^{(r)} < \infty \Leftrightarrow S_x^{(i)} < \infty$, $i \leq r$.

Fazendo $f_x = \mathbb{P}_x(T_x < \infty)$:

$$\mathbb{P}_x(V_x > r) = \mathbb{P}_x(S_x^{(i)} < \infty,\ i \leq r) = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}_x(S_x^{(i)} < \infty) = f_x^r \quad (2)$$

Logo, $\mathbb{E}_x(V_x) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_x(V_x > n) = \sum_{n\geq 0} f_x^n$. (3)

Teorema 1

Vale a seguinte dicotomia

(i) Se $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) = 1$, então x é recorrente e $\sum_{n\geq 0} P_{xx}^{(n)} = \infty$

(ii) Se $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) < 1$, então x é transitório e $\sum_{n\geq 0} P_{xx}^{(n)} < \infty$.

Corolário. Todo estado é ou recorrente (rec) ou transitório (trans).

Dem. Se $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) = f_x = 1$, então de (2):

$\mathbb{P}_x(V_x = \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(V_x > n) = \lim_{n\to\infty} f_x^n = 1$ (x é rec),

e tb $\mathbb{E}_x(V_x) = \sum_{n\geq 0} P_{xx}^{(n)} = \infty$; por outro lado, se $f_x < 1$, então

$\mathbb{E}_x(V_x) = \sum_{n\geq 0} f_x^n = \frac{1}{1-f_x} < \infty \Rightarrow \mathbb{P}_x(V_x = \infty) = 0$ (x é trans). $\square$

Obs. (2) $\Rightarrow$ Sob $\mathbb{P}_x$, $V_x \sim$ Geométrica$(1 - f_x)$ (conv.: Geo$(0) = \infty$).

Teorema 2

Seja $\mathcal{C}$ uma classe de comunicação. Então, ou todos os estados de $\mathcal{C}$ são transitórios, ou são todos recorrentes.

Dem. Se $x \leftrightarrow y$, então existem i, j tq $P_{xy}^{(i)}, P_{yx}^{(j)} > 0$. Logo,

$$P_{xx}^{(i+k+j)} \overset{*}{\geq} P_{xy}^{(i)} P_{yy}^{(k)} P_{yx}^{(j)} \Rightarrow P_{yy}^{(k)} \leq \frac{1}{P_{xy}^{(i)} P_{yx}^{(j)}} P_{xx}^{(i+k+j)}. \text{ Logo,}$$

$$\sum_{k \geq 0} P_{yy}^{(k)} \leq \frac{1}{P_{xy}^{(i)} P_{yx}^{(j)}} \sum_{k \geq 0} P_{xx}^{(i+k+j)} \leq \frac{1}{P_{xy}^{(i)} P_{yx}^{(j)}} \sum_{\ell \geq 0} P_{xx}^{(\ell)}.$$

Logo, se x for transitório, então y também é transitório pelo Teorema 1. $\square$

Obs. Neste contexto, recorrência e transitoriedade são ditas *propriedades de classe*, e temos classes recorrentes e classes transitórias.

---

* $P_{uv}^{(m+n)} \overset{\text{Chapman-Kolmogorov}}{=} \sum_{w \in \mathcal{S}} P_{uw}^{(m)} P_{wv}^{(n)} \geq P_{uz}^{(m)} P_{zv}^{(n)} \; \forall u, v, z \in \mathcal{S}, \; m, n \geq 0$

Teorema 3

Toda classe recorrente é fechada.

Dem. Suponha que $\mathcal{C}$ seja uma classe não fechada;

então existem $x \in \mathcal{C}$ e $y \notin \mathcal{C}$ tais que $x \to y$; e, logo,

existe $i > 0$ tal que $\mathbb{P}_x(X_i = y) > 0$.

Como $\mathbb{P}_y(X_n = x \text{ para algum } n \geq 0) = 0^{\dagger}$, segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(X_i = y,\ X_n = x \text{ i.v.}) &\leq \mathbb{P}_x(X_i = y, X_{n+i} = x \text{ para algum } n \geq 0) \\
&= \mathbb{P}_x(X_i = y)\, \mathbb{P}_x(X_{n+i} = x \text{ para algum } n \geq 0 | X_i = y) \\
&\overset{\text{Markov}}{=} \mathbb{P}_x(X_i = y)\, \mathbb{P}_y(X_n = x \text{ para algum } n \geq 0) \\
&= 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(X_n = x \text{ i.v.}) < 1^{\ddagger}.
\end{aligned}$$

Logo x não é recorrente $\overset{Teo1}{\Longrightarrow}$ x é transitório $\overset{Teo2}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{C}$ é transitória. $\square$

---

†se não, $y \to x \Rightarrow y \in \mathcal{C}$

‡se não, $\mathbb{P}_x(X_i = y) = \mathbb{P}_x(X_i = y,\ X_n = x \text{ i.v.}) = 0$

Teorema 4

Toda classe fechada finita é recorrente.

Dem. Suponha que $\mathcal{C}$ seja uma classe fechada e finita.

Se $\mathbb{P}(X_0 \in \mathcal{C}) = 1$, então existe $x \in \mathcal{C}$ tal que

$$\begin{aligned} 0 < \mathbb{P}(X_n = x \text{ i.v.}) &= \mathbb{P}(X_n = x \text{ i.v.}, T_x < \infty) \\ &= \mathbb{P}(X_n = x \text{ i.v.} \,|\, T_x < \infty)\, \mathbb{P}(T_x < \infty) \\ &\overset{PFM}{=} \mathbb{P}_x(X_n = x \text{ i.v.})\, \mathbb{P}(T_x < \infty). \end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{P}_x(X_n = x \text{ i.v.}) > 0$, e x não é transitório.

Logo, x e $\mathcal{C}$ são recorrentes pelos Teoremas 1 e 2, resp. $\square$

Exemplos

1) $$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cadeia irredutível e finita: Teorema 4 $\Rightarrow$ recorrente.

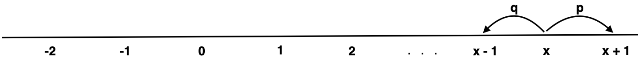
2) $$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C}_1 = \{1, 2\}$ e $\mathcal{C}_2 = \{3, 4\}$ recorrentes; $\mathcal{C}_3 = \{5\}$ transitória.

(Note que $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são fechadas e finitas, e $\mathbb{P}_5(T_5 < \infty) = \frac{1}{2} < 1$.)

Recorrência e transitoriedade no passeio aleatório em $\mathbb{Z}^d$

1) $d = 1,\ q = 1 - p \in (0, 1)$



Obs. Cadeia irredutível.

Seja $D_n = \#\{\text{saltos de } (X_n) \text{ para a direita até o tempo } n\}$

$$\sim Bin(n, p)$$

Dado que $X_0 = 0$, temos $X_n = D_n - (n - D_n) = 2D_n - n$

$$\therefore X_n = k \Leftrightarrow D_n = \tfrac{n+k}{2}$$

$$\therefore P_{00}^{(n)} = \begin{cases} \binom{n}{n/2}(pq)^{n/2}, & \text{se } n = \text{ par;} \\ 0, & \text{se } n = \text{ ímpar.} \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{n\geq 0} P_{00}^{(n)} = \sum_{n\geq 0} P_{00}^{(2n)} = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n}(pq)^n \qquad (4)$$

PAS em $\mathbb{Z}$

Se o lado direito de (4) for $< \infty$, então o PAS em Z é transitório; se não, é recorrente.

Basta avaliar o comportamento assintótico dos somandos em (4).

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \stackrel{\text{Stirling}}{\sim} \frac{A\sqrt{2n}(2n)^{2n}e^{-2n}}{(A\sqrt{n}(n)^n e^{-n})^2} = C\,\frac{1}{\sqrt{n}}\;4^n$$

$$\therefore \tbinom{2n}{n}(pq)^n \sim C\,\tfrac{1}{\sqrt{n}}\;(4pq)^n = \begin{cases} \frac{C}{\sqrt{n}}, & \text{se } p = q; \\ \frac{C}{\sqrt{n}}\lambda^n, & \text{se } p \neq q, \end{cases} \tag{5}$$

para constantes $0 < A, C < \infty$, onde $\lambda = 4pq < 1$, se $p \neq q$.

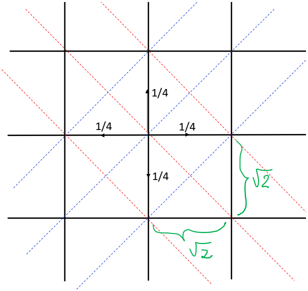
a) $p = 1/2$: Como $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$, temos que $\sum_{n\geq 0} P_{00}^{(n)} = \infty$, e a cadeia é recorrente nesse caso.

b) $p \neq 1/2$: Como $\sum_{n\geq 1} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n}} \leq \sum_{n\geq 1} \lambda^n \stackrel{p\neq q}{<} \infty$, temos que $\sum_{n\geq 0} P_{00}^{(n)} < \infty$, e a cadeia é transitória nesse caso.

PAS simétrico em $\mathbb{Z}^2$

$X_0 = \mathbf{0}$ (origem de $\mathbb{Z}^2$)

Seja $\hat{\mathbb{Z}}^2$ a rede $\mathbb{Z}^2$ rotacionada por 45^o em torno da origem. Então, as projeções ortogonais de $\sqrt{2}X_n$ nos eixos coord de $\hat{\mathbb{Z}}^2$, X_n^+ e X_n^-, são PAS simétricos em $\mathbb{Z}$, indep/s.



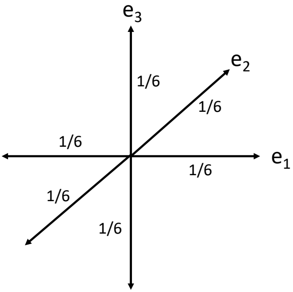
$$\therefore\ P_{\mathbf{00}}^{(n)} = \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(X_n = \mathbf{0}) = \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(X_n^+ = 0, X_n^- = 0 | X_0^+ = 0, X_0^- = 0)$$

$$= \mathbb{P}_0(X_n^+ = 0 | X_0^+ = 0)\, \mathbb{P}_0(X_n^- = 0 | X_0^- = 0)$$

$$= (P_{00}^{(n)})^2 \stackrel{(5)}{=} \begin{cases} \left[\binom{n}{n/2}\frac{1}{2^n}\right]^2 \sim \frac{C'}{n}, & n \text{ par;} \\ 0, & n \text{ ímpar.} \end{cases} \qquad (6)$$

Como $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty$, temos que $\sum_{n\geq 1} P_{\mathbf{00}}^{(n)} = \infty$, e o PASS em $d = 2$ é recorrente.

PAS simétrico em $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$



$d = 3,\ X_0 = \mathbf{0}$

Seja $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$.

Então $X_n = \sum_{i=1}^{n} B_i \mathcal{V}_i$, onde

$$\text{indep} \begin{cases} B_1, B_2, \ldots \text{iid} \sim \text{Bernoulli}(\{-1,+1\}; 1/2); \\ \mathcal{V}_i, \mathcal{V}_2, \ldots \text{iid}, \mathbb{P}(\mathcal{V}_1 = e_i) = 1/3,\ i = 1,2,3. \end{cases}$$

$n \geq 1$: $\mathcal{N}_n^{(i)} = \{j \leq n : \mathcal{V}_j = e_i\}$, $N_n^{(i)} = |\mathcal{N}_n^{(i)}|$; $i = 1,2,3$;

$$\Rightarrow (N_n^{(1)}, N_n^{(2)}, N_n^{(3)}) \sim \text{Multinomial}(n; \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}).$$

Dados $\mathcal{N}_n^{(1)}, \mathcal{N}_n^{(2)}, \mathcal{N}_n^{(3)}$:

$$U_n^{(i)} := \sum_{j \in \mathcal{N}_n^{(i)}} B_j \sim \text{Binomial}(N_n^{(i)}),\ i = 1,2,3, \text{ independentes}$$

PASS em $\mathbb{Z}^3$

Se n for ímpar, então $P_{\mathbf{00}}^{(n)} = \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(X_n = \mathbf{0}) = 0$; quando n for par:

$$P_{\mathbf{00}}^{(n)} = \frac{1}{6^n} \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \text{ pares} \\ n_1+n_2+n_3=n}} \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} \prod_{i=1}^{3} \binom{n_i}{n_i/2} = \frac{1}{6^n} \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \text{ pares} \\ n_1+n_2+n_3=n}} \frac{n!}{(\prod_{i=1}^{3} n_i!/2)^2}$$

$$\stackrel{n=2k}{=} \frac{1}{6^{2k}} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \frac{(2k)!}{(k_1!k_2!k_3!)^2} = \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \binom{k}{k_1\ k_2\ k_3}^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{2k}$$

$$\leq \underbrace{\binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}}}_{\sim\ \text{const}/\sqrt{n}} \times \frac{1}{3^k} \max_{k_1+k_2+k_3=k} \binom{k}{k_1\ k_2\ k_3}$$

No caso em que $k = 3m = k_1 + k_2 + k_3$, pode-se checar que

$$\binom{3m}{k_1\ k_2\ k_3} \stackrel{\S}{\leq} \binom{3m}{m\ m\ m} \stackrel{\text{Stirling}}{\sim} \frac{A\sqrt{3m}\,(3m)^{3m} e^{-3m}}{(A\sqrt{m}\, m^m\, e^{-m})^3} = \frac{\text{const}}{k}\, 3^k$$

---

§se $k_1 < m < k_2$: $\binom{3m}{k_1\ k_2\ k_3} < \binom{3m}{k_1+1\ k_2-1\ k_3}$

PASS em $\mathbb{Z}^3$ (cont.)

Logo,

$$P_{\mathbf{00}}^{(n)} \leq \text{const}/n^{3/2}, \tag{7}$$

se $n =$ múltiplo de 6; $= 0$, se $n =$ ímpar.

E note que $\quad P_{\mathbf{00}}^{(6m)} \geq \begin{cases} \left(\frac{1}{6}\right)^2 P_{\mathbf{00}}^{(6m-2)} \\ \left(\frac{1}{6}\right)^4 P_{\mathbf{00}}^{(6m-4)} \end{cases} \quad \Rightarrow$ (7) vale $\forall$ n par.

$\therefore \sum_{n\geq 1} P_{\mathbf{00}}^{(n)} < \infty$, pois $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$, e logo

o PASS em $d = 3$ é transitório.

Obs. 1) Similarmente podemos argumentar que o PASS em $\mathbb{Z}^d$ é transitório em $d \geq 4$.

2) O argumento por projeção feito acima, no Slide 12, só funciona no caso bidimensional.